

Scenariusz lekcji z wykorzystaniem narzędzi TIK

Autor scenariusza: Kamil Kulik

Przedmiot: Matematyka

Poziom nauczania: Szkoła ponadpodstawowa - Liceum

Szkoła: Prywatne Liceum im. Królowej Jadwigi w Lublinie

Temat: Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowej. Odczytywanie własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu.

Czas trwania: 45 min

Cel ogólny: Uczeń szkicuje wykresy funkcji kwadratowych oraz odczytuje własności tej funkcji z wykresu.

Cele operacyjne:

Poziom wiadomości:

A. Zapamiętanie wiadomości – uczeń:

- wymienia własności funkcji kwadratowej takie jak dziedzina, zbiór wartości, przedziały monotoniczności, miejsca zerowe, wierzchołek, najmniejsza lub największa wartość funkcji oraz dla jakiego argumentu jest przyjmowana.

B. Zrozumienie wiadomości – uczeń:

- wyjaśnia, jakie dane są niezbędne do narysowania wykresu funkcji kwadratowej,
- rozróżnia sposoby rysowania funkcji kwadratowej w zależności od postaci funkcji,
- rozumie zależności zachodzące między własnościami funkcji kwadratowej a jej wyglądem/wykresem.

Poziom umiejętności:

C. Zastosowanie wiadomości w sytuacjach typowych – uczeń:

- rysuje wykres funkcji kwadratowej na podstawie informacji wyciągniętych ze wzoru funkcji kwadratowej,
- selekcjonuje potrzebne dane i informacje na temat funkcji kwadratowej z jej wzoru,
- odczytuje i interpretuje własności funkcji kwadratowej takie jak dziedzina, zbiór wartości, przedziały monotoniczności, miejsca zerowe itp. z wykresu funkcji.

D. Zastosowanie wiadomości w sytuacjach problemowych – uczeń:

- planuje sposób rozwiązania w zależności od danych, które może odczytać ze wzoru funkcji kwadratowej,
- przewiduje przybliżony wygląd wykresu funkcji kwadratowej na podstawie ograniczonej ilości danych na temat tej funkcji.

Cele wychowawcze:

- kształcenie umiejętności rozumowania i argumentacji,
- kształcenie umiejętności pracy uczniów z wykorzystaniem tablicy interaktywnej,
- kształcenie sprawności rachunkowej.

Metody:

- pogadanka,
- ćwiczenia praktyczne – rozwiązywanie zadań z pomocą GeoGebry,
- aktywizująca – gra w programie Wordwall oraz Mentimeter.

Formy:

- indywidualna,
- grupowa.

Środki dydaktyczne:

- „Matematyka 2 do liceów i techników, zakres podstawowy – zbiór zadań”, Oficyna Edukacyjna Pazdro, Marcin Kurczab, Elżbiera Kurczab, Elżbieta Świda. Wyd. I, Warszawa 2020 r.,
- tablica interaktywna,
- program GeoGebra - <https://www.geogebra.org/>,
- chmura słów/mapa myśli w programie Mentimeter - <https://www.mentimeter.com/>,
- przygotowana gra dydaktyczna w Wordwall - .
<https://wordwall.net/pl/resource/63880127>.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje porozumiewania się w języku ojczystym,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje uczenia się.

I. Faza przygotowawcza

- Sprawy organizacyjne – przywitanie uczniów, sprawdzenie obecności.
- Przedstawienie tematu lekcji: „Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowej. Odczytywanie własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu”.
Nawiązanie do wiadomości poznanych przez uczniów na poprzednich lekcjach za pomocą gry stworzonej w Wordwall. Wyświetlenie gry na tablicy interaktywnej. Chętni uczniowie podchodzą do tablicy interaktywnej i grają w grę (dopasowują po dwa kafelki). <https://wordwall.net/pl/resource/63880127>.

II. Faza realizacyjna

- Nauczyciel wyświetla program Geogebra na tablicy multimedialnej. Na tablicy mazakowej zapisuje problem, który będzie razem z klasą w ramach pogadanki próbował rozwiązać. Rozwiązanie nauczyciel podaje/tłumaczy w krokach, aby uczniowie nie pogubili się w toku rozwiązywania zadania. Za każdym razem, nauczyciel prosi o wsparcie uczniów w ramach podania wzoru, lub obliczenia jakiegoś działania. Każdy wynik w postaci punktu lub osi symetrii, jest nanoszony przez nauczyciela do programu Geogebra.

Zad. Naszkicuj wykres funkcji $y = 2x^2 + 4x - 6$. Następnie omów własności tej funkcji.

Rozwiązanie:

Krok 1. Wierzchołek: $\Delta = 64$, $p = \frac{-4}{4} = -1$, $q = \frac{-64}{8} = -8$, $W(-1, -8)$

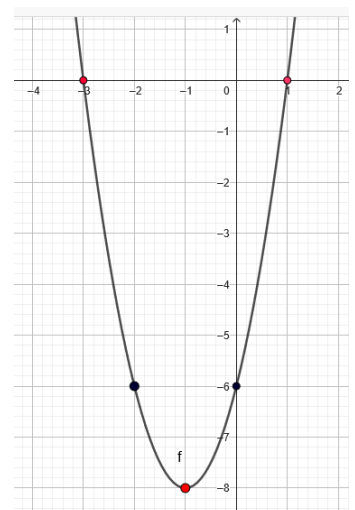
Krok 2. Przecięcie z osią OY: $(0, c) = (0, -6)$

Krok 3. Oś symetrii i punkt $(0, c)$ symetryczny względem osi: $x = -1$, $(-2, -6)$

Krok 4. Miejsca zerowe: $\sqrt{\Delta} = 8$, $x_1 = \frac{-4-8}{4} = -3$, $x_2 = \frac{-4+8}{4} = 1$

Powstał wykres funkcji taki jak na rysunku obok. Nauczyciel zadaje teraz pytanie: „Jakie własności funkcji możemy odczytać z wykresu?” Uczniowie podają różne możliwości, które nauczyciel zapisuje na tablicy. Po podanych pomysłach, nauczyciel podsumowuje jakie własności są najważniejsze oraz co one oznaczają i wraz z klasą odczytuje je z powstałego wykresu.

1. Dziedzina i zbiór wartości: $D: x \in \mathbb{R}$, $ZW: y \in \langle -8, +\infty \rangle$



2. Miejsca zerowe: $x = -3, x = 1$
 3. Maksymalne przedziały monotoniczności: $f^\uparrow: x \in (-1, +\infty)$,
 $f^\downarrow: x \in (-\infty, -1)$
 4. Dodatnie i ujemne wartości funkcji: $f > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$, $f < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 1)$
 5. Najmniejsza i największa wartość: $Wart_{min} = -8$ dla $x = -1$
 $Wart_{max}: brak$
- Kolejny przykład wykonuje chętny uczeń na tablicy. Reszta uczniów w klasie pomaga słownie. Można podzielić zadanie między dwójkę uczniów. Używamy programu GeoGebra do rysowania wykresów.

Zad. Narysuj wykres funkcji $y = -x^2 + 6x - 5$. Następnie omów własności tej funkcji.

Rozwiązanie:

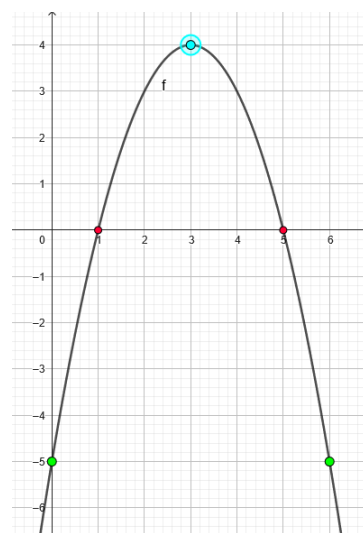
Krok 1. Wierzchołek: $\Delta = 16$, $p = \frac{-6}{-2} = 3$, $q = \frac{-16}{-4} = 4$, $W(3, 4)$

Krok 2. Przecięcie z osią OY: $(0, c) = (0, -5)$

Krok 3. Oś symetrii i punkt $(0, c)$ symetryczny względem osi: $x = 3$, $(6, -5)$

Krok 4. Miejsca zerowe: $\sqrt{\Delta} = 4$, $x_1 = \frac{-6-4}{-2} = 5$, $x_2 = \frac{-6+4}{-2} = 1$

Krok 5. (opcjonalny). Warto zwrócić uwagę uczniom, że znamy wartości funkcji kwadratowej dla argumentów wokół $p = 3$, natomiast nie wiemy jaka jest wartość funkcji dla argumentów 2 i 4. Warto nakierować uczniów że: $f(2) = f(4) = 3$. Da to kolejne punkty wykresu.



1. Dziedzina i zbiór wartości: $D: x \in \mathbb{R}$, $ZW: y \in (-\infty, 4)$
2. Miejsca zerowe: $x = 1, x = 5$
3. Maksymalne przedziały monotoniczności: $f^\downarrow: x \in (3, +\infty)$,
 $f^\uparrow: x \in (-\infty, 3)$
4. Dodatnie i ujemne wartości funkcji: $f < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$, $f > 0 \Leftrightarrow x \in (1, 5)$
5. Najmniejsza i największa wartość: $Wart_{min}: brak$
 $Wart_{max} = 4$ dla $x = 3$

- Dzielimy uczniów na pary. Przydzielamy parom na zmianę jeden z dwóch przykładów, które chcemy pokazać na zajęciach z zadania 3.47 przykład a) oraz e). Przykłady te posłużą za pokazanie, jak obchodzić się z innymi postaciami funkcji kwadratowej. Prosimy uczniów aby pracowali w parach i spróbowali, wykorzystując wiedzę zdobytą przez ostatecnie zajęcia, wykonać te zadania. Po wykonanym zadaniu w parach, chętni uczniowie pokazują rozwiązania. Ciągłe używamy programu GeoGebra do rysowania wykresów.

Zad 3.47. Narysuj wykres funkcji kwadratowej f i omów jej własności, jeśli:

a) $f(x) = 2(x - 1)(x + 1)$

b) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 2$

Rozwiązanie a):

Krok 0. $f(x) = 2(x - 1)(x + 1) = 2x^2 - 2$

Krok 1. Wierzchołek: $\Delta = 16$, $p = \frac{0}{4} = 0$, $q = \frac{-16}{8} = -2$, $W(0, -2)$

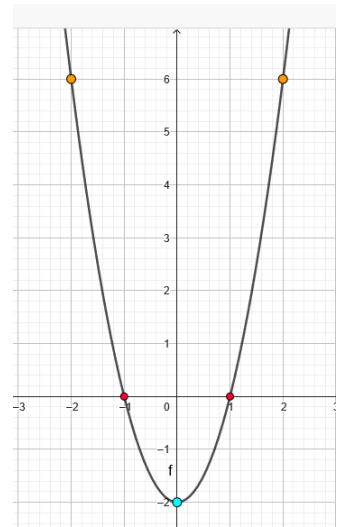
Krok 2. Przecięcie z osią OY: $(0, c) = (0, -2) = W$

Krok 3. Oś symetrii i punkt $(0, c)$ symetryczny względem osi: $x = 0$,

Krok 4. Miejsca zerowe: $x_1 = -1, x_2 = 1$

Krok 5. (opcjonalny). $f(-2) = f(2) = 6$.

1. Dziedzina i zbiór wartości: $D: x \in \mathbb{R}, ZW: y \in \langle -2, +\infty \rangle$
2. Miejsca zerowe: $x = -1, x = 1$
3. Maksymalne przedziały monotoniczności: $f^\uparrow: x \in \langle 0, +\infty \rangle,$
 $f^\downarrow: x \in \langle -\infty, 0 \rangle$
4. Dodatnie i ujemne wartości funkcji: $f > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty),$ $f < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$
5. Najmniejsza i największa wartość: $Wart_{min} = -2$ dla $x = 0$
 $Wart_{max}: brak$



Rozwiązanie b):

Krok 0. $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2 = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$

Krok 1. Wierzchołek: $\Delta = 4, p = -1, q = -2, W(-1, -2)$

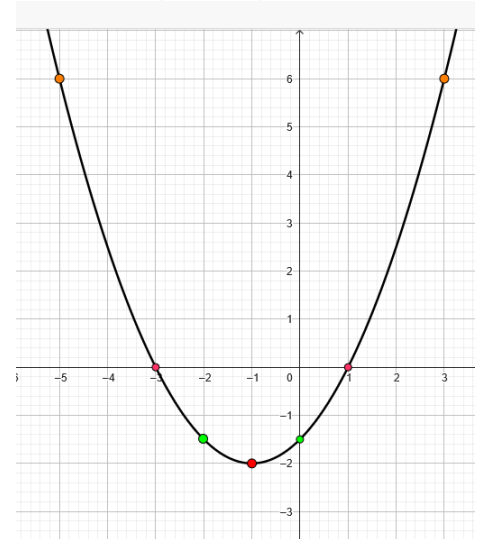
Krok 2. Przecięcie z osią OY: $(0, c) = (0, -\frac{3}{2})$

Krok 3. Oś symetrii i punkt $(0, c)$ symetryczny względem osi: $x = -1, (-2, -\frac{3}{2})$

Krok 4. Miejsca zerowe: $x_1 = -3, x_2 = 1$

Krok 5. (opcjonalny). $f(-5) = f(3) = 6$.

1. Dziedzina i zbiór wartości: $D: x \in \mathbb{R}, ZW: y \in \langle -2, +\infty \rangle$
2. Miejsca zerowe: $x = -3, x = 1$
3. Maksymalne przedziały monotoniczności: $f^\uparrow: x \in \langle -1, +\infty \rangle,$ $f^\downarrow: x \in \langle -\infty, -1 \rangle$
4. Dodatnie i ujemne wartości funkcji: $f > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty),$ $f < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 1)$
5. Najmniejsza i największa wartość: $Wart_{min} = -2$ dla $x = -1$ $Wart_{max}: brak$



- Wykonujemy razem z klasą lub uczeń chętny przy tablicy zadanie 3.48. przykład a) ze zbioru zadań.

Zad 3.48. a) Naszkicuj we wspólnym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g .

Następnie rozwiąż graficznie równanie $f(x) = g(x)$, gdy $f(x) = (x+2)^2, g(x) = 1$.

Rozwiązanie:

Krok 0. $f(x) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

Krok 1. Wierzchołek: $\Delta = 4, p = -2, q = 0,$
 $W(-2, 0)$

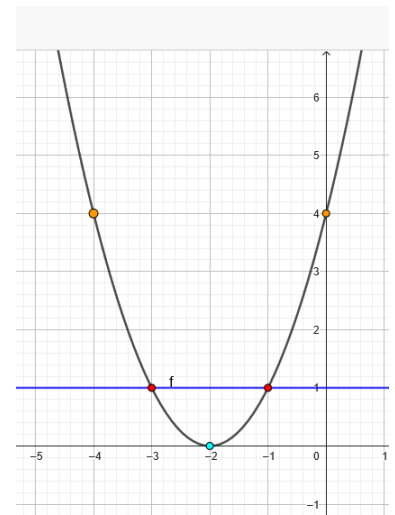
Krok 2. Przecięcie z osią OY: $(0, c) = (0, 4)$

Krok 3. Oś symetrii i punkt $(0, c)$ symetryczny względem osi:
 $x = -2, (-4, 4)$

Krok 4. Miejsca zerowe: $x_w = -2$

Krok 5. (opcjonalny). $f(-3) = f(-1) = 1$.

Rysujemy także funkcję $g(x) = 1$. Oraz odczytujemy punkty przecięcia się wykresów funkcji $x \in \{-3, -1\}$



- Jeśli do końca lekcji pozostało 5 minut lub zostały zrobione wszystkie zadania, przechodzimy do podsumowania lekcji.

III. Podsumowanie lekcji

- Nauczyciel podsumowuje lekcje z pomocą aplikacji mentimeter. W aplikacji tworzone jest miejsce na odpowiedzi uczniów. Nauczyciel zapisuje kod dostępu do prezentacji uczniom i prosi ich, aby na swoich telefonach wyszukali stronę www.menti.com oraz wpisali podany przez niego kod. Na telefonach uczniów pojawi się wprowadzone wcześniej przez nauczyciela pytanie: „Jakie własności funkcji kwadratowej możemy odczytać z wykresu?”. Uczniowie mają miejsce na trzy odpowiedzi. Następnie odpowiedzi uczniów pojawiają się w formie mapy myśli/chmury słów na tablicy interaktywnej. Im więcej osób udzieliło daną odpowiedź, tym ta odpowiedź staje się większa. Następnie, razem z nauczycielem uczniowie czytają odpowiedzi i tłumaczą co dane własności oznaczają.
- Nauczyciel zadaje jeszcze jedno pytanie w aplikacji mentimeter lub normalnie: „Jakie kroki musimy wykonać aby narysować wykres funkcji kwadratowej?”. Uczniowie odpowiadają na pytanie nauczyciela, dzięki temu porządkują i podsumowują swoją wiedzę.

IV. Praca domowa

- Zadanie pracy domowej. Nauczyciel zapisuje polecenie na tablicy. Narysuj wykresy funkcji kwadratowych podanych niżej. Następnie sprawdź poprawność wykresów w GeoGebra. Odczytaj z wykresu własności funkcji.
 - a) $y = x^2 + 10x + 25$
 - b) $y = x^2 - 3x + 7$
 - c) $y = 2(x + 1)(x - 3)$

Praca Domowa – rozwiązania

$$a) \Delta = 100 - 4 * 1 * 25 = 0$$

$$p = \frac{-10}{2} = -5, \quad q = 0$$

$$OY: (0, c) = (0, 25)$$

$$\text{oś symetrii: } x = -5$$

Własności:

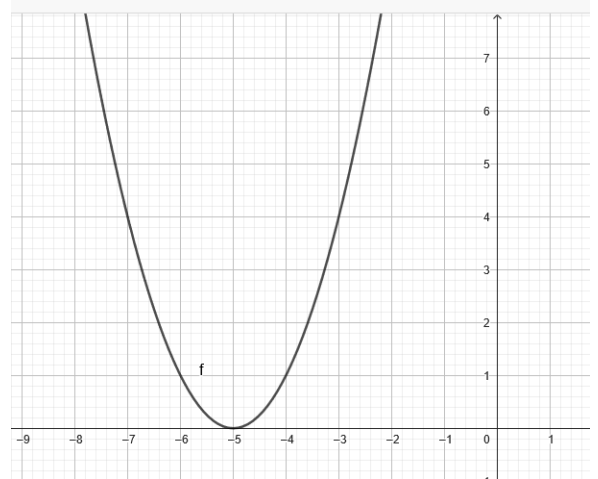
$$D: x \in \mathbb{R}, \quad ZW: y \in \langle 0, +\infty \rangle$$

$$\text{miejsca zerowe: } x = -5$$

$$\text{Wart}_{\min}: 0 \text{ dla } x = -5, \quad \text{Wart}_{\max}: \text{brak}$$

$$f^{\uparrow}: \langle -5, +\infty \rangle, \quad f^{\downarrow}: (-\infty, -5)$$

$$f > 0: x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}, \quad f < 0: x \in \emptyset$$



$$b) \Delta = 9 - 4 * 1 * 7 = 9 - 28 = -17$$

$$p = \frac{3}{2}, \quad q = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$$

$$OY: (0, c) = (0, 7)$$

$$\text{oś symetrii: } x = \frac{3}{2}$$

$$f(2) = f(1), f(0) = f(3), f(-1) = f(4)$$

Własności:

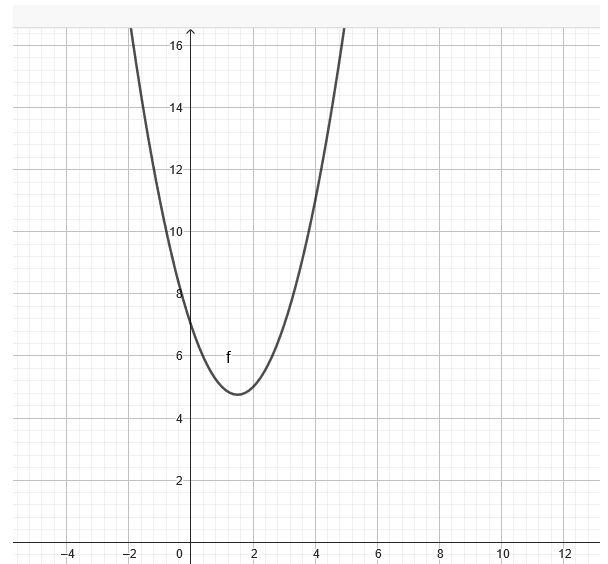
$$D: x \in \mathbb{R}, \quad ZW: y \in \langle \frac{3}{2}, +\infty \rangle$$

$$\text{miejsca zerowe: brak}$$

$$\text{Wart}_{\min}: 4\frac{1}{4} \text{ dla } x = \frac{3}{2}, \quad \text{Wart}_{\max}: \text{brak}$$

$$f^{\uparrow}: \langle \frac{3}{2}, +\infty \rangle, \quad f^{\downarrow}: (-\infty, \frac{3}{2})$$

$$f > 0: x \in \mathbb{R}, \quad f < 0: x \in \emptyset$$



$$c) y = 2(x + 1)(x - 3) = 2x^2 - 4x - 6$$

$$\Delta = 16 - 4 * 2 * (-6) = 16 + 48 = 64$$

$$p = -1, \quad q = \frac{-64}{8} = -8$$

$$OY: (0, c) = (0, -6)$$

$$\text{oś symetrii: } x = -1$$

Własności:

$$D: x \in \mathbb{R}, \quad ZW: y \in \langle -8, +\infty \rangle$$

$$\text{miejsca zerowe: } x = -1, x = 3$$

$$\text{Wart}_{\min}: -8 \text{ dla } x = -1, \quad \text{Wart}_{\max}: \text{brak}$$

$$f^{\uparrow}: \langle -1, \infty \rangle, \quad f^{\downarrow}: (\infty, -1)$$

$$f > 0: x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty), \quad f < 0: x \in (-1, 3)$$

