

**Autor scenariusza:** Elżbieta Słowik

**Przedmiot:** matematyka

**Poziom nauczania:** poziom podstawowy

**Szkoła:** VI Liceum Ogólnokształcące im. Hugona Kołłątaja w Lublinie

**Temat:** Ciąg arytmetyczny

**Czas trwania:** 1x 45 min

**Cel ogólny:** Definiowanie ciągu arytmetycznego i podanie jego własności.

**Cele operacyjne:**

**Poziom wiadomości:**

A. Zapamiętanie wiadomości - uczeń:

- definiuje ciąg arytmetyczny i jego różnicę,
- podaje wzór ogólny ciągu arytmetycznego,
- przedstawia monotoniczność ciągu arytmetycznego.

B. Zrozumienie wiadomości - uczeń:

- wyjaśnia, jak wyznaczyć różnicę ciągu arytmetycznego,
- wyjaśnia, jak wyznaczać wyrazy ciągu arytmetycznego,
- wyjaśnia monotoniczność ciągu arytmetycznego,
- ilustruje ciąg arytmetyczny w układzie współrzędnych.

**Poziom umiejętności:**

C. Zastosowanie wiadomości w sytuacjach typowych - uczeń:

- podaje przykłady ciągów arytmetycznych,
- wyznacza różnicę ciągu arytmetycznego,
- wyznacza wyrazy ciągu arytmetycznego, mając dany pierwszy wyraz i różnicę,
- wyznacza wzór na wyraz ogólny ciągu arytmetycznego,
- określa monotoniczność ciągu arytmetycznego.

D. Zastosowanie wiadomości w sytuacjach problemowych - uczeń:

- analizuje monotoniczność ciągu arytmetycznego.

**Cele wychowawcze:**

- przygotowanie do życia we współczesnym świecie, ze szczególnym uwzględnieniem korzystania z technik informacyjnych i komunikacyjnych;
- rozwijanie umiejętności logicznego myślenia i wyciągania wniosków;

**Metody:**

Metoda eksponująca – aplet programu Geogebra

Metoda aktywizująca – dyskusja dydaktyczna

Metoda problemowa – pogadanka

**Formy:**

praca zespołowa,

praca indywidualna.

**Środki dydaktyczne:**

- podręcznik MATeMATyka 2 Zakres podstawowy W. Babiański Nowa Era
- komputer – platforma Teams, program Microsoft Whiteboard
- aplet programu Geogebra „Ciąg arytmetyczny”:  
<https://www.geogebra.org/m/CadATkbbk> autor: Monika Nowik
- test w aplikacji Forms

**Kształowane kompetencje kluczowe**

- Kompetencje porozumiewania się w języku ojczystym.
- Kompetencje matematyczne i podstawowe kompetencje naukowo-techniczne.
- Kompetencje informatyczne.
- Kompetencje uczenia się.

## I. Faza przygotowawcza

### 1. Część organizacyjna

- Powitanie klasy
- Sprawdzenie obecności

### 2. Powtórzenie wiadomości o sposobach przedstawiania ciągów.

Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie znanych sposobów przedstawiania ciągów liczbowych. Uczniowie podają sposoby prezentowania ciągów:

- opis słowny, podający warunki, jakie spełniają wyrazy
- wyraz ogólny ciągu
- wykres

## II. Faza realizacyjna

- Podanie tematu lekcji
- Podanie celu lekcji
- Nauczyciel udostępnia w programie Microsoft Whiteboard Ćwiczenie 1 i prosi by uczniowie zauważyli zależności pomiędzy kolejnymi wyrazami podanych ciągów. Uczniowie za pomocą strzałek zapisują zależności:

### Ćwiczenie 1

Zauważ i zaznacz zależności pomiędzy kolejnymi wyrazami podanych ciągów liczbowych:

Przykład I: 1, 2, 4, 7, 11, ...

Przykład II: 1, 3, 5, 7, 9, ...

Przykład III:  $1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, \dots$

### Odpowiedzi do Ćwiczenia 1:

Przykład I:  $1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+4} 11 \dots$

Przykład II:  $1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+2} 7 \xrightarrow{+2} 9 \dots$

Przykład III:  $1 \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \xrightarrow{-\frac{1}{2}} 0 \xrightarrow{-\frac{1}{2}} -\frac{1}{2} \xrightarrow{-\frac{1}{2}} -1 \dots$

oraz zauważają, że wyrazy ciągów w Przykładach II i III różnią się o stałą liczbę, w przeciwieństwie do Przykładu I.

Nauczyciel informuje uczniów, że ciąg arytmetyczny przedstawiony jest w Przykładach II i III. Uczniowie definiują ciąg arytmetyczny i jego różnicę.

- Nauczyciel podaje definicję ciągu arytmetycznego (Podręcznik str. 117) oraz zapisuje wzory na różnicę ciągu arytmetycznego:

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

$$r = a_{n+1} - a_n = \text{const}$$

- Uczniowie rozwiązują Ćwiczenie 2 podane w programie Microsoft Whiteboard. Chętni lub wskazani przez nauczyciela uczniowie wyliczają różnice ciągów i kolejne trzy wyrazy.

### Ćwiczenie 2

Wyznacz różnicę ciągu arytmetycznego i podaj trzy kolejne wyrazy:

a) 9, 3, -3, -9, -15, ...

b)  $1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 4, \dots$

c) 2, 2, 2, 2, ...

### Odpowiedź do Ćwiczenia 2

a)  $r = 3 - 9 = -6$

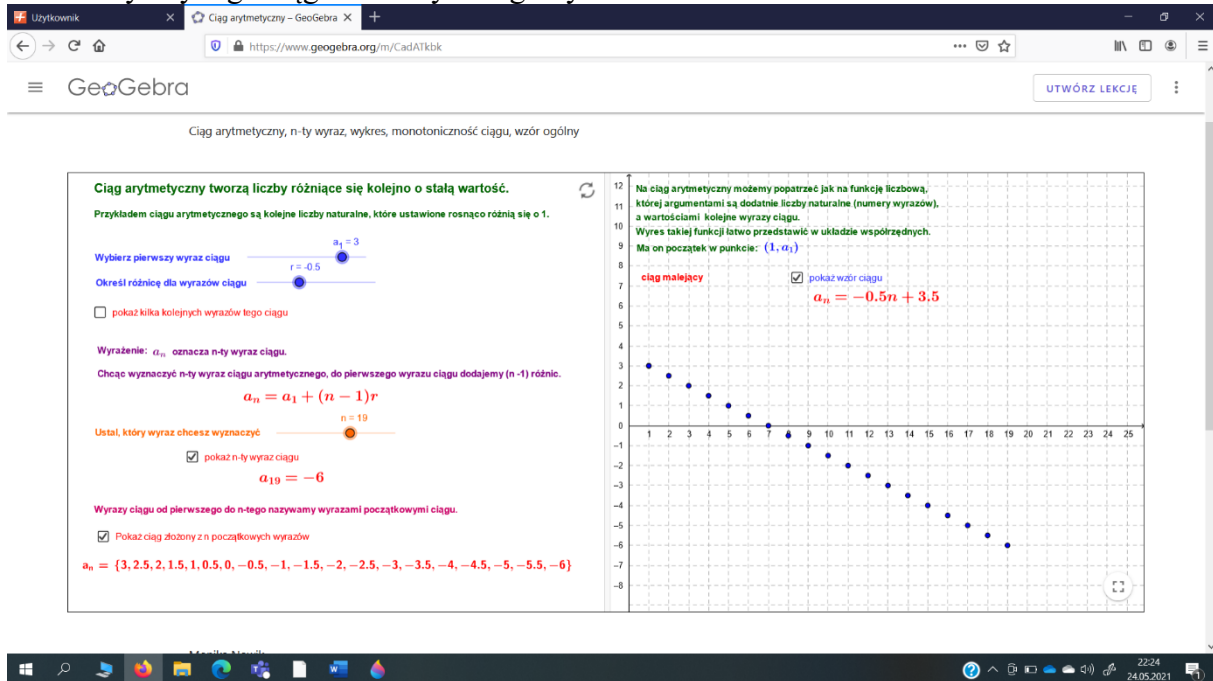
$a_6 = -21, a_7 = -27, a_8 = -33$

b)  $r = 2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

$a_6 = 4\frac{3}{4}, a_7 = 5\frac{1}{2}, a_8 = 6\frac{1}{4}$

c)  $r = 0$   
 $a_5 = 2, a_6 = 2, a_7 = 2$

- Nauczyciel udostępnia uczniom aplet z programu Geogebra pt. „Ciąg arytmetyczny”. Za pomocą ruchomych wskaźników  $a_1$  i  $r$  prezentuje wykres ciągu arytmetycznego, wyrazy tego ciągu oraz wyraz ogólny.



Uczniowie mają za zadanie zauważyć i podać zależności dotyczące monotoniczności ciągu arytmetycznego. Uczniowie dyskutują od czego uzależnione jest określenie monotoniczności ciągu arytmetycznego. Chętni lub wskazani uczniowie zapisują w programie Microsoft Whiteboard wnioski:

- Ciąg arytmetyczny ( $a_n$ ) o różnicy  $r$  jest:
- rosnący, gdy  $r > 0$ ;
  - malejący, gdy  $r < 0$ ;
  - stały, gdy  $r = 0$ .

Zapisują również wzór na wyraz ogólny ciągu arytmetycznego  $a_n = a_1 + (n - 1)r$ . Nauczyciel omawia różne sposoby przedstawiania ciągu arytmetycznego, wyznaczanie kolejnych wyrazów i wzoru na wyraz ogólny.

Na przedstawionym aplecie widzicie ciąg arytmetyczny przedstawiony za pomocą:

- wzoru  $a_n = -0,5n + 3,5$ .
- wykresu w układzie współrzędnych,
- podanych kolejnych wyrazów tego ciągu (3; 2,5; 2; 1,5; 1; 0,5; 0; -0,5; ...)

Na podstawie wzoru na wyraz ogólny ciągu arytmetycznego wyznaczmy dziewiętnasty wyraz tego ciągu, jeśli wyraz pierwszy wynosi  $a_1 = 3$  a różnica  $r = -0,5$ :

$$a_{19} = 3 + (19 - 1) \cdot (-0,5) = 3 + 18 \cdot (-0,5) = 3 - 9 = -6$$

oraz wyprowadźmy wzór dla podanego ciągu:

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot (-0,5) = 3 - 0,5n + 0,5 = -0,5n + 3,5.$$

Na podstawie definicji ciągu arytmetycznego podajmy kolejne wyrazy tego ciągu:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 3 + (-0,5) = 2,5 \\ a_3 &= 2,5 + (-0,5) = 2 \end{aligned}$$

$$a_4 = 2 + (-0,5) = 1,5$$

...

- Na podstawie wyciągniętych wniosków rozwiązują w programie Microsoft Whiteboard

### Ćwiczenie 3.

Na podstawie przykładów z Ćwiczenia 2 określ monotoniczność ciągu, wyznacz wyraz ogólny i oblicz piętnasty wyraz ciągu.

#### Odpowiedź do Ćwiczenia 3

a)  $r < 0$  ciąg malejący

$$a_n = 9 + (n - 1) \cdot (-6) = -6n + 15$$

$$a_{15} = 9 + (15 - 1) \cdot (-6) = -75$$

b)  $r > 0$  ciąg rosnący

$$a_n = 1\frac{3}{4} + (n - 1) \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}n + 1$$

$$a_{15} = \frac{3}{4} \cdot 15 + 1 = 12\frac{1}{4}$$

c)  $r = 0$  ciąg stały

$$a_n = a_{15} = 2$$

Chętni lub wskazani przez nauczyciela uczniowie wykonują obliczenia i zapisują je w programie Microsoft Whiteboard.

### III. Podsumowanie lekcji

- Powtórzenie definicji ciągu arytmetycznego oraz poznanych wzorów i własności tego ciągu.
- Uczniowie rozwiązują krótki test w aplikacji Forms (Załącznik 3) sprawdzający poznane wiadomości.

#### Test „Ciąg arytmetyczny” – aplikacja FORMS

1. Wskaż ciąg arytmetyczny:

- 2, 3, 5, 8, 11, ...
- -6, -5, -4, -3, -2, ... (poprawna odpowiedź)
- -6, 5, -4, 3, -2, ...
- 2, 3, 4, 6, 7, ...

2. Określ monotoniczność ciągu arytmetycznego (2, 3, 4, 5, 6, ...)

- ciąg rosnący (poprawna odpowiedź)
- ciąg malejący
- ciąg stały
- ciąg nierosnący

3. Określ monotoniczność ciągu arytmetycznego, jeśli  $a_1=2$  i  $r=-5$

- ciąg rosnący
- ciąg malejący (poprawna odpowiedź)
- ciąg stały
- ciąg niemalejący

4. Wskaż rosnący ciąg arytmetyczny.

- $a_1=3, r=-1$
- $a_1=-3, r=-1$
- $a_1=-3, r=1$  (poprawna odpowiedź)
- $a_1=3, r=0$

5. Dany jest ciąg arytmetyczny, w którym  $a_1=4$  i  $r=3$ . Wyraz siódmy wynosi

- $a_7=22$  (poprawna odpowiedź)
- $a_7=25$

- $a_7=27$
- $a_7=31$
- 6. Wskaż wzór na wyraz ogólny ciągu arytmetycznego, w którym  $a_1=4$  i  $r=3$ .
  - $a_n=3n+4$
  - $a_n=3n+1$  (poprawna odpowiedź)
  - $a_n=4n+3$
  - $a_n=4n-1$

Po rozwiązaniu uczniowie od razu znają wyniki testu i widzą poprawne odpowiedzi. Nauczyciel po sprawdzeniu test wstawi „+” za pracę na lekcji uczniom, którzy uzyskają co najmniej 50%.

- Nauczyciel nagradza „+” aktywność uczniów na lekcji.
- Nauczyciel eksportuje obraz z programu Microsoft Whiteboard i umieszcza w aplikacji Teams w zakładce „Materiały z zajęć”.

#### IV. Praca domowa

- Rozwiąż ćwiczenie 3 oraz zadanie 1, 2, 3 strony 118-119 z podręcznika.

#### Ćwiczenie 3 strona 118

Podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego. Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu.

a) 2, 4, 6, 8, 10, ...

$$a_n = 2n, \quad a_{20} = 2 \cdot 20 = 40$$

b)  $4, 4\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}, 6, \dots$

$$a_n = \frac{1}{2}n + 3\frac{1}{2}, \quad a_{20} = \frac{1}{2} \cdot 20 + 3\frac{1}{2} = 13\frac{1}{2}$$

c) 3, 2, 1, 0, -1, -2, ...

$$a_n = -n + 4, \quad a_{20} = -20 + 4 = -16$$

#### Zadanie 1 strona 119

Oblicz n-ty wyraz ciągu arytmetycznego ( $a_n$ ). Określ monotoniczność tego ciągu.

a)  $a_1 = -5, \quad r = 3, \quad n = 14$

$$a_{14} = -5 + (14 - 1) \cdot 3 = 34, \quad r > 0 \text{ ciąg rosnący}$$

b)  $a_1 = 4, \quad r = -4, \quad n = 11$

$$a_{11} = 4 + (11 - 1) \cdot (-4) = -36, \quad r < 0 \text{ ciąg malejący}$$

c)  $a_1 = 1, \quad r = \frac{1}{2}, \quad n = 20$

$$a_{20} = 1 + (20 - 1) \cdot \frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}, \quad r > 0 \text{ ciąg rosnący}$$

d)  $a_1 = -2, \quad r = 0,1, \quad n = 35$

$$a_{35} = -2 + (35 - 1) \cdot 0,1 = 1,4, \quad r > 0 \text{ ciąg rosnący}$$

#### Zadanie 2 strona 119

Oblicz różnicę i podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego ( $a_n$ ).

a)  $a_1 = 6, \quad a_3 = 20$

$$20 = 6 + (3 - 1)r, \quad r = 7, \quad a_n = 7n - 1$$

b)  $a_1 = -4, \quad a_4 = 5$

$$5 = -4 + (4 - 1)r, \quad r = 3, \quad a_n = 3n - 7$$

c)  $a_1 = 9, \quad a_6 = 6\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} &6\frac{1}{2} = 9 + (6 - 1)r, \quad r = -0,5, \quad a_n = -0,5n + 9,5 \\ \text{d) } &a_1 = 13, \quad a_{10} = -23 \\ &-23 = 13 + (10 - 1)r, \quad r = -4, \quad a_n = -4n + 17 \end{aligned}$$

Zadanie 3 strona 119

Wyznacz liczby:

a)  $a, b$  tak, aby liczby:  $1, a, b, 10$  tworzyły ciąg arytmetyczny

$$10 = 1 + 3r, \quad r = 3, \quad a = 4, \quad b = 7$$

b)  $a, b, c$  tak, aby liczby:  $2, a, b, c, 100$  tworzyły ciąg arytmetyczny

$$100 = 2 + 4r, \quad r = 24,5, \quad a = 26,5, \quad b = 51, \quad c = 75,5$$