

Autor scenariusza: Andrzej Ganczar

Przedmiot: matematyka

Poziom nauczania: liceum ogólnokształcące, kl. 2

Szkoła: III Liceum Ogólnokształcące im. Unii Lubelskiej w Lublinie

Temat: Przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych z zastosowaniem kalkulatora graficznego on-line Desmos

Czas trwania: 45 min

Cel ogólny:

- zastosowanie poznanych w klasie pierwszej przekształceń wykresów funkcji do funkcji trygonometrycznych,
- zapoznanie z obsługą kalkulatora graficznego Desmos,
- trening zadaniowy utrwalający poznane wiadomości.

Cele operacyjne w odniesieniu do treści nauczania

Poziom wiadomości:

A. Zapamiętanie wiadomości - uczeń:

- nazywa podstawowe przekształcenia wykresów funkcji (przesunięcie o wektor, jednokładność względem osi układu współrzędnych, symetrie),
- podaje wzory analityczne na poszczególne przekształcenia wykresów.

B. Zrozumienie wiadomości - uczeń:

- wyjaśnia własnymi słowami efekt działania danego przekształcenia na funkcję (bez odniesienia do konkretnego wzoru funkcji).

Poziom umiejętności:

C. Zastosowanie wiadomości w sytuacjach typowych - uczeń:

- umie przekształcić dany wykres funkcji w symetriach względem początku lub osi układu oraz w przesunięciach, a następnie zapisać wzór funkcji, którą przedstawia obraz wykresu,
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = |f(x)|$, $y = c f(x)$, $y = f(cx)$,
- posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych,
- stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji,
- umie naszkicować wykres funkcji o zadanych własnościach,

D. Zastosowanie wiadomości w sytuacjach problemowych - uczeń:

- analizuje wykresy funkcji trygonometrycznych będących efektem działania kilku przekształceń na funkcje elementarne i na tej podstawie identyfikuje użyte przekształcenia oraz ich kolejność wystąpienia.

Cele wychowawcze:

- a) wdrożenie uczniów do dokładnego wykonywania zadań,
- b) kształtowanie umiejętności analizy i obserwacji,
- c) kształtowanie umiejętności wyrażania swoich myśli oraz dyskusji.

Metody:

- pogadanka problemowa
- burza mózgów
- ćwiczeniowa

Formy:

- praca indywidualna i zbiorowa

Środki dydaktyczne:

- kalkulator graficzny on-line Desmos (www.desmos.com)
- tablica interaktywna (zajęcia w formie stacjonarnej)
- platforma Zoom.us (zajęcia w formie zdalnej)
- M. Kurczab, E. Kurczab, E. Świda, *Zbiór zadań dla liceów i techników klasa 2*, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro

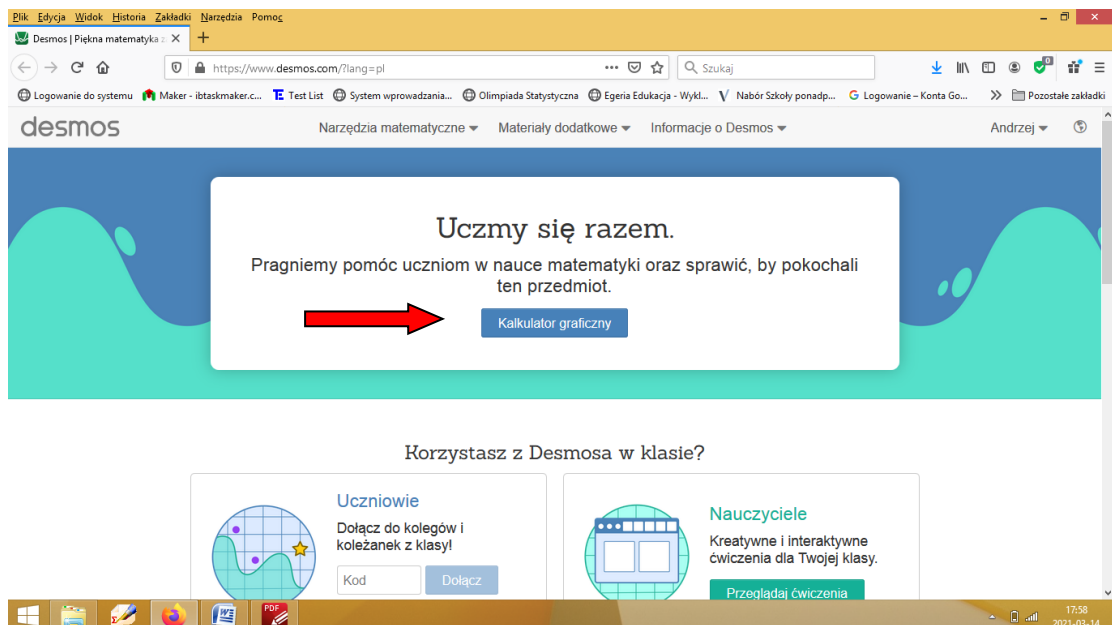
Kształtowane kompetencje kluczowe

Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

I. Faza przygotowawcza

- a) Sprawy organizacyjno-porządkowe (sprawdzenie obecności).
- b) Określenie celu i formy pracy na lekcji (logowanie na stronę aplikacji Desmos – www.desmos.com, wybór zakładki kalkulator graficzny).



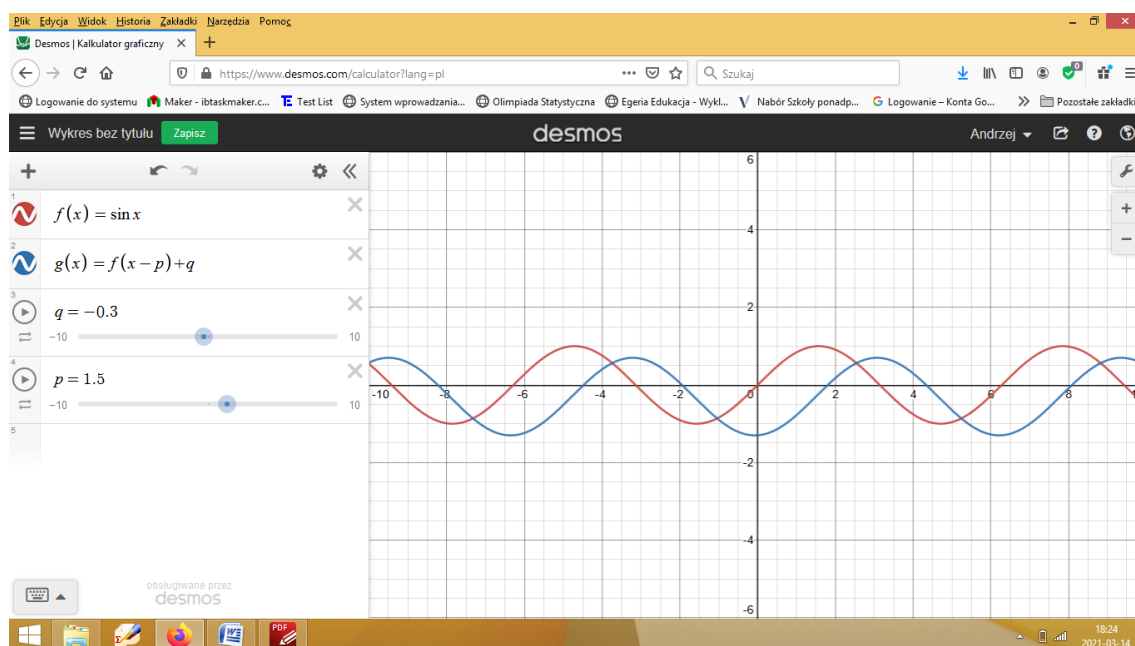
- c) Podanie i zapisanie tematu lekcji.
- d) Przypomnienie wiadomości i umiejętności z klasy pierwszej dotyczących przekształceń wykresów funkcji.

II. Faza realizacyjna

Nauczyciel przeprowadza pokaz obsługi aplikacji Desmos, w tym celu definiuje funkcję $f(x)=\sin x$, następnie definiuje na jej podstawie funkcję $g(x)=f(x-p)+q$ dla parametrów rzeczywistych p i q .

Po wprowadzeniu wzoru aplikacja automatycznie reaguje propozycją określenia suwaków pozwalających na manipulację w czasie rzeczywistym parametrami

i stosownie do tego przekształcania wykresu funkcji $f(x)$. Należy zwrócić uwagę, iż ważny jest powyżej przedstawiony sposób określenia funkcji – umożliwiający jednocześnie wyświetlanie oryginału oraz dynamicznie uzyskiwanego (poprzez zmianę parametrów) obrazu w przesunięciu o wektor $[p, q]$.



Zadanie 1: W aplikacji Desmos naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \cos x$. Następnie zdefiniuj funkcję $g(x) = a \cos bx$ oraz utwórz suwaki dla parametrów a i b . Obserwując wpływ zmiany wartości tych parametrów na wykres funkcji $g(x)$ wyciągnij stosowne wnioski dotyczące okresu i amplitudy tej funkcji. Zakładamy, że parametry a i b nie zerują się.

Rozwiązanie: Uczniowie powinni wywnioskować, że zmiana parametru a (czyli skali powinowactwa względem osi OX) zmienia amplitudę na $|a|$ w porównaniu do wykresu $f(x) = \cos x$, z kolei okres funkcji $g(x)$ wynosi $\frac{2\pi}{|b|}$.

Zadanie 2: Niech $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Wychodząc od funkcji $f_1(x) = \sin x$ zapisz kolejne przekształcenia, które umożliwią uzyskanie wykresu funkcji $f(x)$ przyjmij, że:

- pierwszym przekształceniem jest przesunięcie o wektor,
- pierwszym przekształceniem jest powinowactwo względem osi OY .

Rozwiązanie: Uczniowie rozwiązują zadanie metodą „prób i błędów” stosując aplikację Desmos, celem osiągnięcia właściwej sekwencji przekształceń.

$$\text{a) } f_1(x) = \sin x \xrightarrow{T[-\frac{\pi}{3}, 0]} f_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \xrightarrow{P_{Oy}^{k=0.5}} f(x)$$

$$\text{b) } f_1(x) = \sin x \xrightarrow{P_{Oy}^{k=0.5}} f_2(x) = \sin 2x \xrightarrow{T[-\frac{\pi}{6}, 0]} \sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$$

Wnioskiem z zadania jest stwierdzenie, że kolejność przekształceń wykresu jest istotna.

Zadanie 3: Wychodząc od wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$, narysuj wykres funkcji $g(x) = 3 - |\operatorname{tg}(|x| - 1)|$. Zapisz stosowny ciąg kolejnych przekształceń prowadzących do rozwiązania. Sprawdź poprawność rozumowania korzystając z aplikacji Desmos.

Rozwiązanie: Uczeń powinien zauważyć parzystość docelowej funkcji – prowadzi to do zawężenia rozważań do argumentów nieujemnych (można przy okazji zapytać o dziedzinę g).

Dla

$$x \in \langle 0, \infty \rangle - \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{N} \right\} = \langle 0, \infty \rangle \cap D_g$$

mamy $g(x) = 3 - |\operatorname{tg}(x - 1)|$ skąd wynika, przykładowo, dla tych argumentów

$$f(x) = \operatorname{tg} x \xrightarrow{T[1,0]} \operatorname{tg}(x - 1) \xrightarrow{|\dots|} |\operatorname{tg}(x - 1)| \xrightarrow{S_{Ox}} -|\operatorname{tg}(x - 1)| \xrightarrow{T[0,3]} g(x),$$

a parzystość funkcji uzyskujemy poprzez symetrię otrzymanego powyżej wykresu względem OY . Weryfikacja poprawności odpowiedzi w aplikacji.

III. Podsumowanie lekcji

- Ocena zaangażowania i aktywności uczniów.
- Krótka dyskusja dotycząca wpływu zastosowanej technologii na efektywność rozumienia omawianych zagadnień – spostrzeżenia uczniów.

IV. Praca domowa

- Zadania: 8.89/f, g, h, 8.40/c, f, 8.41/d, 8.42/d ze zbioru
M. Kurczab, E. Kurczab, E. Świda, *Zbiór zadań dla liceów i techników klasa 2*,
Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro.