
Zadania „Wykaż, udowodnij” w edukacji matematycznej uczniów szkół podstawowych i klas gimnazjalnych

**Zadania pochodzą z materiałów CKE, egzaminów próbnych
i zbiorów zadań GWO, Operon, Nowa Era, WSiP**

Opracowanie powstało we współpracy grupy nauczycieli matematyki szkół lubelskich:

Kinga Adamkiewicz - SP 52, Anna Biernat - SP 6, Iwona Drobek - ZS nr 12,

Magdalena Jaskot - SP 40, Agnieszka Kazana - SP 19, Łukasz Sprawka - SP 40,

Justyna Sójka - SP 30, Anna Żurawska - SP 20,

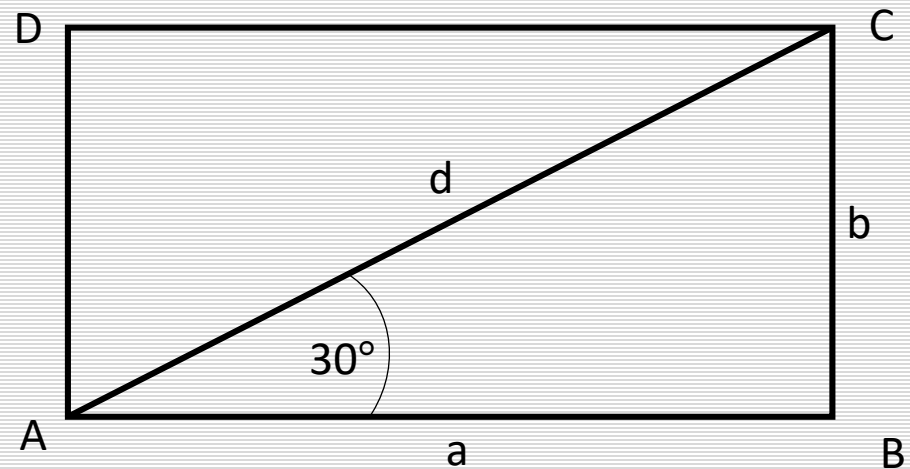
Elżbieta Wojtowicz - SP 30 – doradca metodyczny nauczycieli matematyki m. Lublin

Materiał przygotowany przez grupę nauczycieli matematyki,
Lublin 2018r.

GEOMETRIA

Zadanie 1 (CKE 2015)

Przekątna prostokąta ABCD nachylona jest do jednego z jego boków pod kątem 30° . Uzasadnij, że pole prostokąta ABCD jest równe polu trójkąta równobocznego o boku równym przekątnej tego prostokąta.



Rozwiązanie:

ΔABC jest trójkątem o kątach 30° , 60° , 90° , zatem:

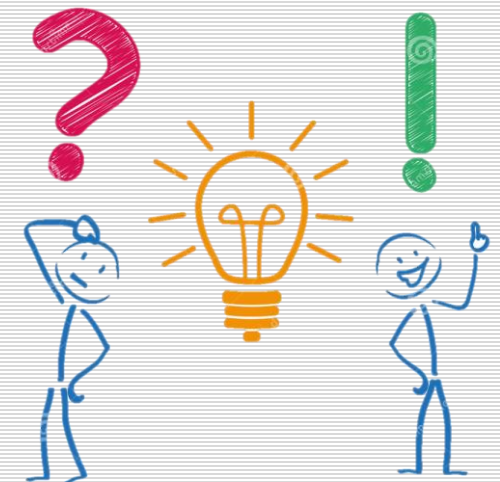
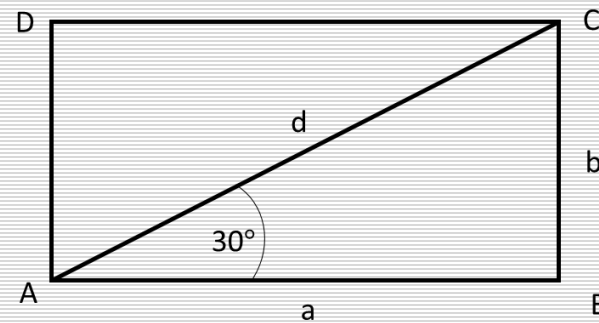
$$b = \frac{1}{2}d$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}d$$

$$P_{pr} = ab = \frac{\sqrt{3}}{2}d * \frac{1}{2}d = \frac{\sqrt{3}}{4}d^2$$

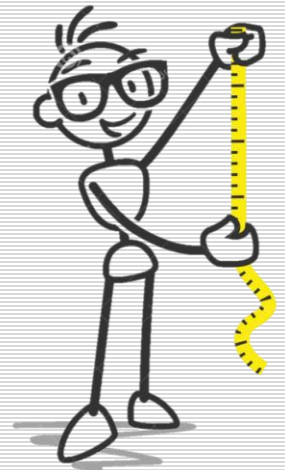
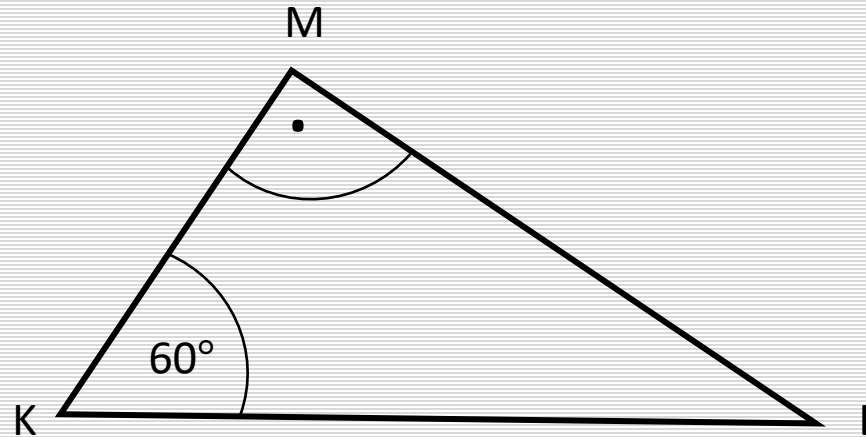
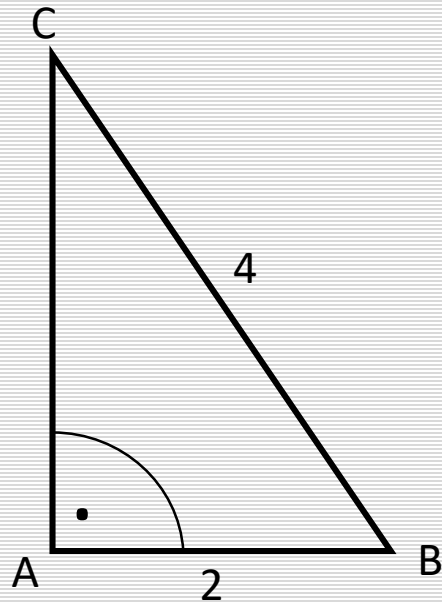
$$P_{tr} = \frac{d^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_{tr} = P_{pr}$$



Zadanie 2 (CKE 2014)

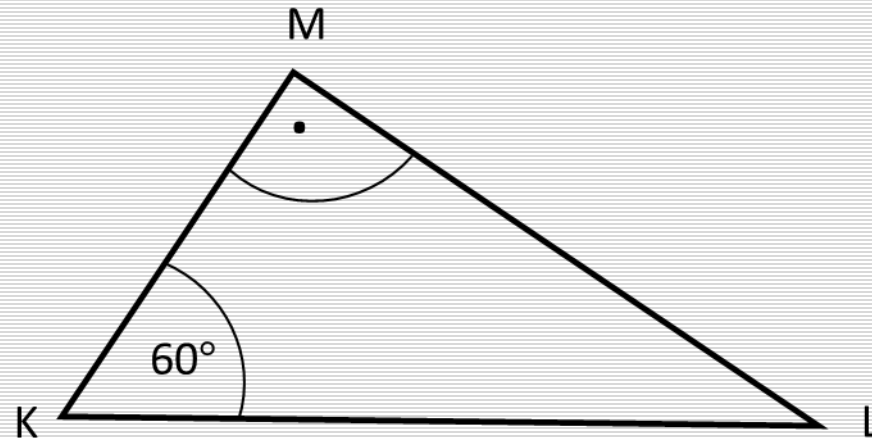
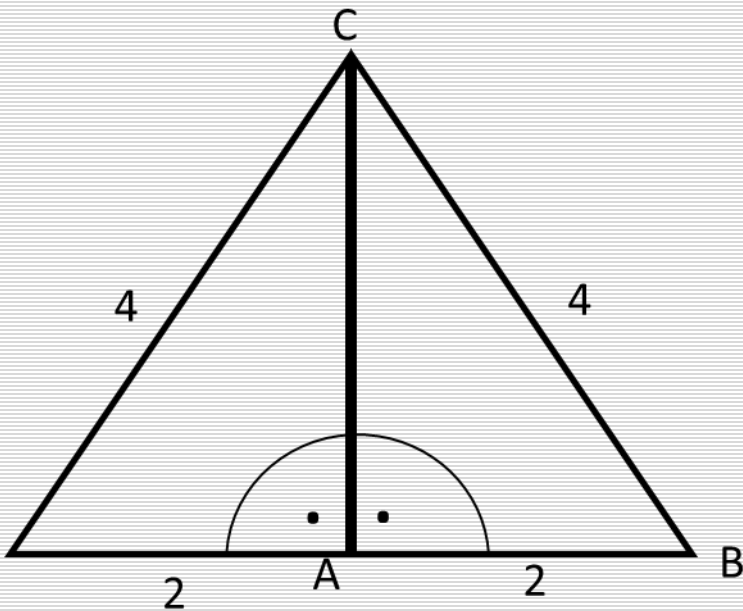
Uzasadnij, że trójkąty prostokątne ABC i KLM przedstawione na rysunku są podobne.



Rozwiązanie:

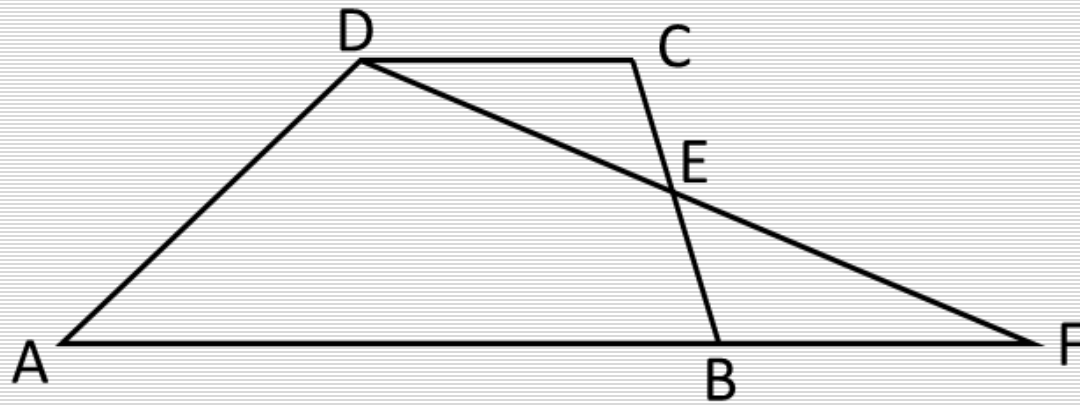
$$|\sphericalangle KLM| = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

W trójkącie ABC przyprostokątna AB jest połową przeciwprostokątnej BC, co oznacza, że trójkąt ABC jest połową trójkąta równobocznego, czyli jego kąty ostre mają miary 30° i 60° . Miary kątów tych trójkątów są równe, zatem trójkąty ABC i KLM są podobne.

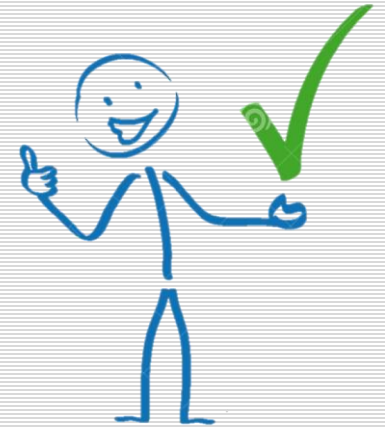
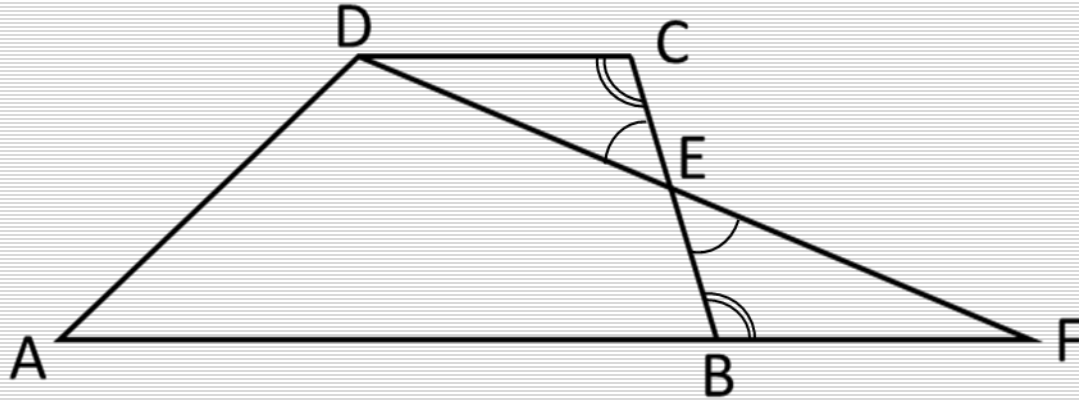


Zadanie 3 (CKE 2013)

Na rysunku przedstawiono trapez $ABCD$ i trójkąt AFD . Punkt E leży w połowie odcinka BC . Uzasadnij, że pole trapezu $ABCD$ i pole trójkąta AFD są równe.



Rozwiązanie:



Zauważmy, że:

$$P_{ABCD} = P_{ABED} + P_{CDE}$$

$$P_{AFD} = P_{ABED} + P_{BEF}$$

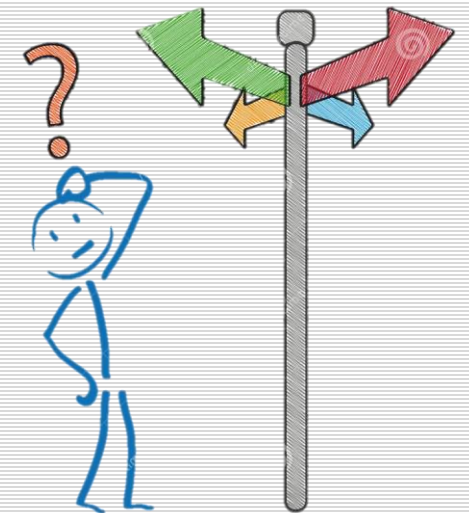
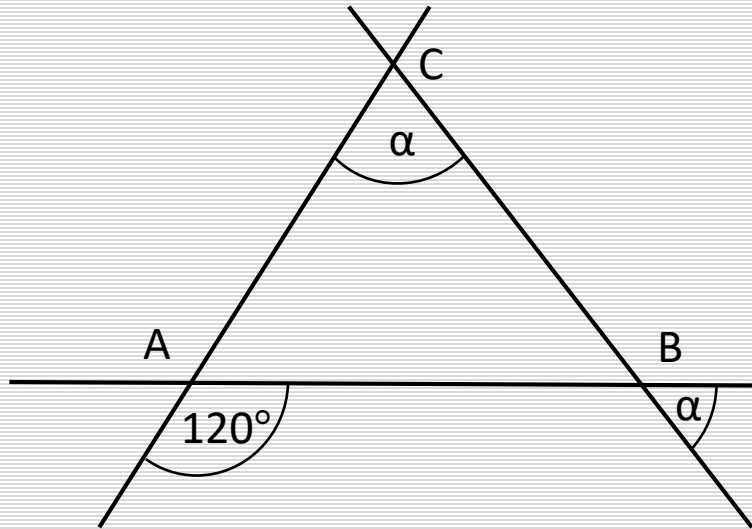
Aby wykazać równość pól trapezu ABCD i trójkąta AFD wystarczy wykazać, że trójkąty BEF i CED są przystające.

$|CE| = |EB|$ - z warunków zadania

$|\sphericalangle CED| = |\sphericalangle FEB|$ - jako kąty wierzchołkowe

Zadanie 4 (CKE 2012)

Trzy proste przecinające się w sposób przedstawiony na rysunku tworzą trójkąt ABC. Uzasadnij, że trójkąt ABC jest równoboczny.



Rozwiązanie:

Korzystając z własności kątów wierzchołkowych otrzymujemy: $|\sphericalangle ABC| = \alpha$.

Korzystając z własności kątów przyległych otrzymujemy:

$$|\sphericalangle CAB| = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Korzystając z twierdzenia o sumie kątów w trójkącie mamy:

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle CAB| = 180^\circ$$

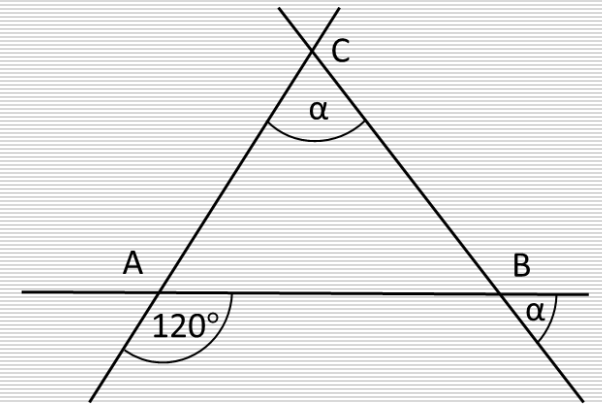
$$\alpha + \alpha + 60^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha = 120^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

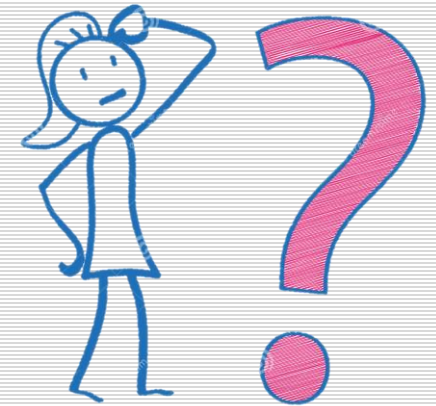
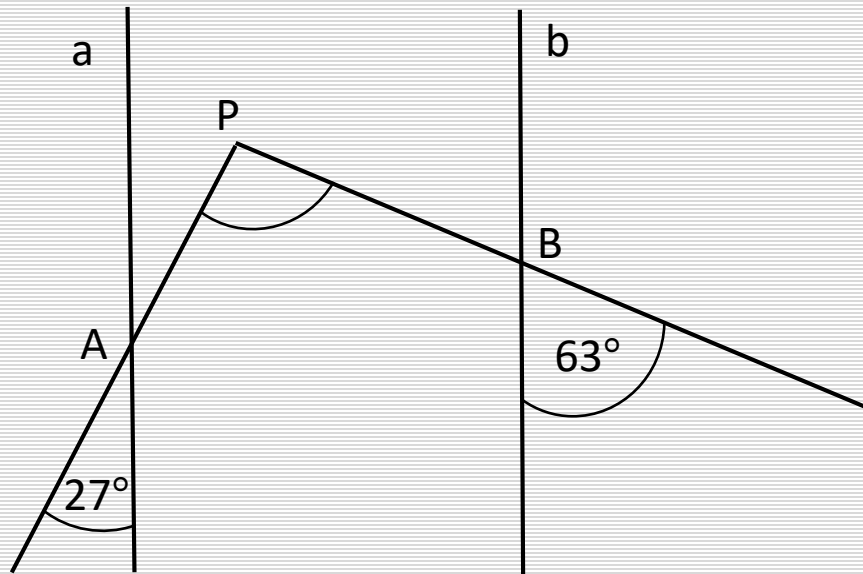
Czyli: $|\sphericalangle CAB| = 60^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$, $|\sphericalangle BCA| = 60^\circ$.

Z tego wynika, że trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym.



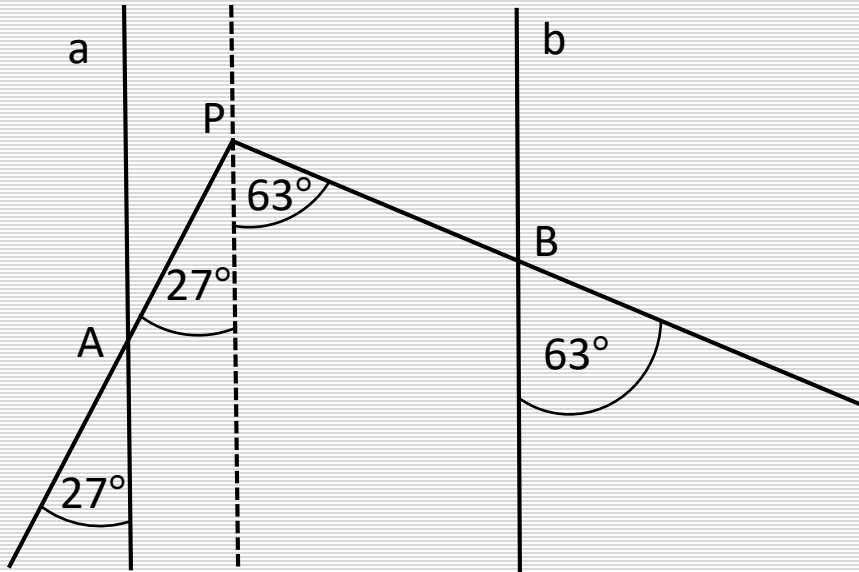
Zadanie 5 (CKE informator)

Proste a i b są równoległe.



Półproste PA i PB przecinają te proste, w wyniku czego tworzą z nimi kąty ostre o miarach podanych na rysunku. Uzasadnij, że kąt APB jest prosty.

Rozwiązanie:



Przez punkt P prowadzimy prostą c równoległą do a i b . Dzieli ona kąt APB na dwie części, z których jedna jest kątem odpowiadającym do 27° , a druga – do 63° , zatem:

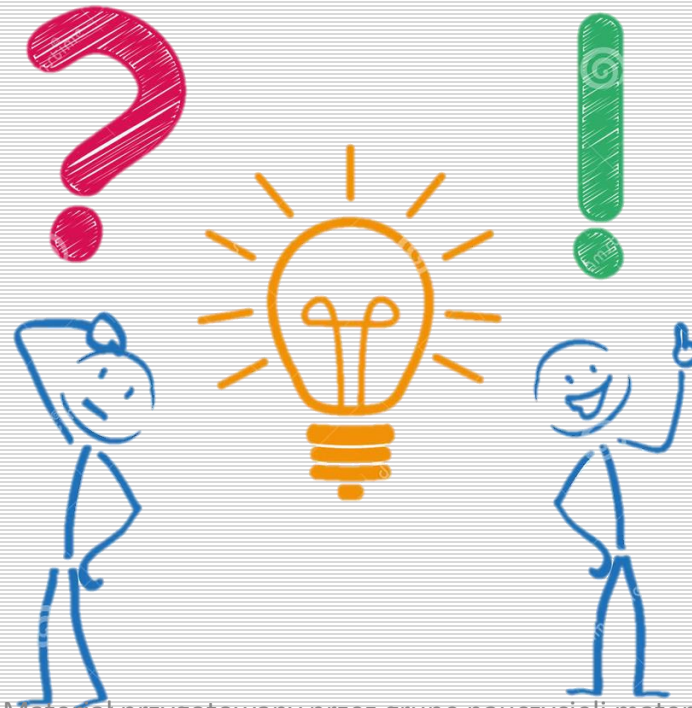
$$|\sphericalangle APB| = 27^\circ + 63^\circ = 90^\circ.$$

Kąt APB jest kątem prostym.

ARYTMETYKA, ALGEBRA

Zadanie 1 (CKE 2014)

Uzasadnij, że jeśli liczba jest podzielna przez 15 i przez 14, to jest podzielna przez 10.



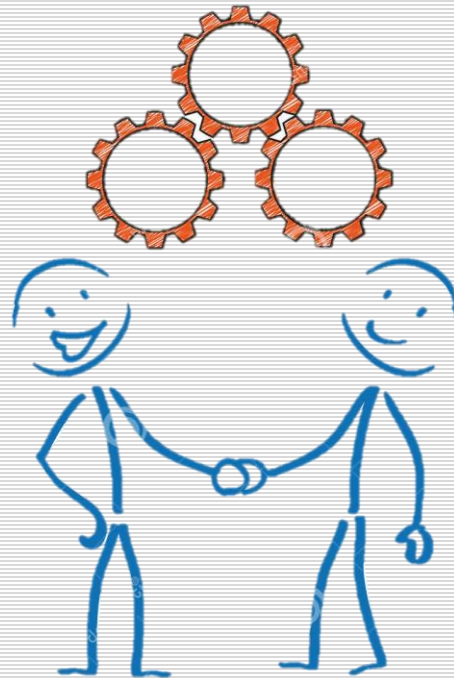
Rozwiązanie:

Niech liczba x dzieli się przez 14 oraz 15, tzn:

$x = 14 \cdot n = 2 \cdot 7 \cdot n$ tak więc x dzieli się przez 2

$x = 15 \cdot m = 3 \cdot 5 \cdot m$ tak więc x dzieli się przez 5

Skoro x dzieli się przez 2 oraz 5, a więc dzieli się przez 10.



Zadanie 2

Za przejazd autostradą Karol zapłacił 8,4 euro. Potem powiedział, że płacił tylko monetami o nominałach 0,20 euro i 0,50 euro i że monet tych było 20. Czy może to być prawda? Odpowiedź uzasadnij.



Rozwiązanie:

Niech x oznacza liczbę monet o nominale 0,20 euro. Wówczas monet o nominale 0,50 euro było $20 - x$.

Możemy zapisać równanie: $0,2x + 0,5(20 - x) = 8,4$, którego rozwiązaniem jest liczba $\frac{16}{3}$.
Liczba monet powinna być liczbą naturalną, więc Karol powiedział nieprawdę.



Zadanie 3 (CKE 2017)

Zapisano trzy różne liczby, których średnia arytmetyczna jest równa 4, oraz dwie inne liczby, których średnia arytmetyczna jest równa 2. Uzasadnij, że średnia arytmetyczna zestawu tych pięciu liczb jest równa 3,2. Zapisz obliczenia.



Rozwiązanie:

Suma trzech pierwszych liczb jest równa $a + b + c = 3 \cdot 4 = 12$

Suma dwóch następnych liczb jest równa $d + e = 2 \cdot 2 = 4$.

Suma pięciu liczb jest równa $a + b + c + d + e = 4 + 12 = 16$.

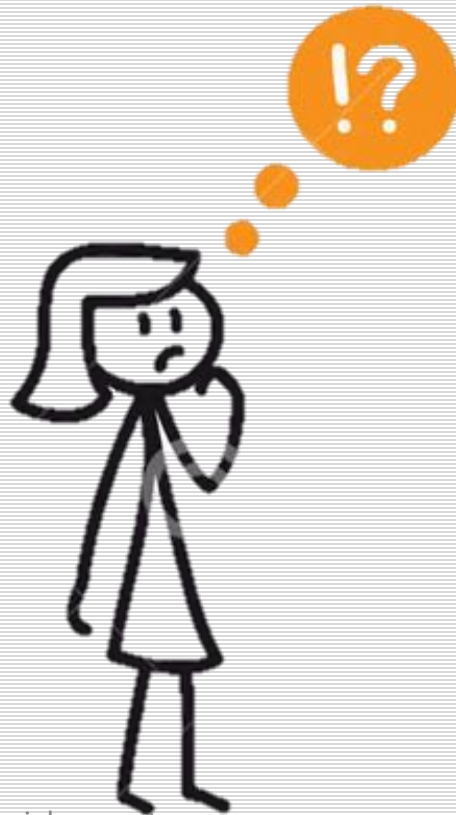
Średnia pięciu liczb jest równa $\frac{a+b+c+d+e}{5} = 16 : 5 = 3,2$

cnd



Zadanie 4 (informator CKE)

Uzasadnij, że pierwszy dzień września i pierwszy dzień grudnia tego samego roku wypadają w tym samym dniu tygodnia.



Rozwiązanie:

Pierwszy sposób :

wrzesień 30 dni

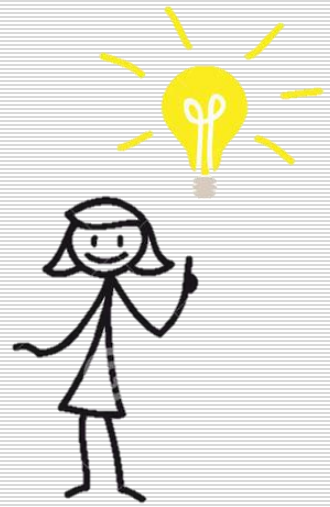
październik 31 dni

listopad 30 dni

Razem: 91 dni $91 : 7 = 13$ Od 1 września do 1 grudnia mija równo 13 tygodni, więc 1 września przypada w tym samym dniu tygodnia, co 1 grudnia.

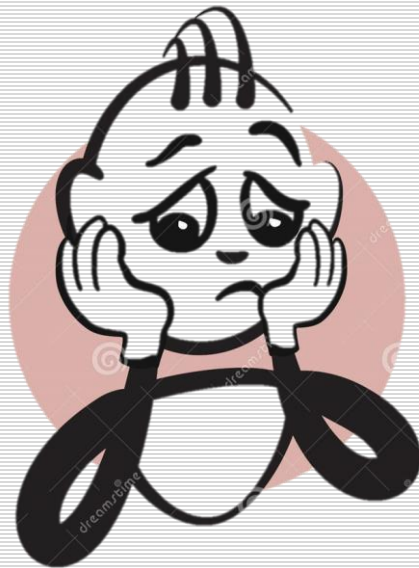
Drugi sposób:

Przypuśćmy, że 1 września przypada w poniedziałek, zatem kolejne poniedziałki to: 8, 15, 22 i 29 września, 6, 13, 20 i 27 października, 3, 10, 17 i 24 listopada oraz 1 grudnia. Wynika stąd, że 1 września i 1 grudnia przypadają w tym samym dniu tygodnia. Tak samo jest, gdy 1 września wypada we wtorek, w środę itd. – zawsze 1 grudnia przypada w tym samym dniu tygodnia, co 1 września.



Zadanie 5 (CKE 2017)

Uzasadnij, że wartość wyrażenia $3^{43} + 3^{46}$ jest liczbą parzystą.



Rozwiązanie:

Każda potęga liczby 3 jest liczbą nieparzystą.

3^{43} – liczba nieparzysta

3^{46} – liczba nieparzysta

Suma dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą, zatem $3^{43} + 3^{46}$ jest liczbą parzystą.



Dziękujemy za uwagę 😊

Opracowanie powstało we współpracy grupy nauczycieli matematyki szkół lubelskich:

Kinga Adamkiewicz - SP 52, Anna Biernat - SP 6, Iwona Drobek - ZS nr 12,

Magdalena Jaskot - SP 40, Agnieszka Kazana - SP 19, Łukasz Sprawka - SP 40,

Justyna Sójka - SP 30, Anna Żurawska - SP 20,

Elżbieta Wojtowicz - SP 30 – doradca metodyczny nauczycieli matematyki m. Lublin

Materiał przygotowany przez grupę nauczycieli matematyki,
Lublin 2018r.